Dönem II Biyofizik

Enformasyon Teorisi

Barkın İlhan

October 23, 2019

N.E.Ü. Meram Tıp Fakültesi

http://icon.unrlabs.org/lecturenote/tr/enformasyon_teorisi.pdf

Enformasyon teorisi: Shannon entropisi, enformasyon miktarı



"Bu mektubum olması gerekenden uzun oldu, çünkü kısa yazacak zamanım yoktu."

Blaise Pascal

Enformasyon teorisinin temel kavramları

- **Enformasyon:** İletişim mühendisliğinde bir mesajın taşıdığı bilgi düzeyini nicel olarak tanımlamak için kullanılan terim.
- **Enformasyon (iletişim) teorisi:** Enformasyon oluşumu, dönüşümü, kaynağın ürettiği mesajın **enformasyon miktarı**, iletilmesi, işlenmesi ve **bir kanalın iletebileceği maksimum enformasyon** gibi konularla ilgilenen matematiksel teori.
- Enformasyon teorisi açısından, canlı, cansız, doğal veya yapay bütün sistemler enformasyon taşıyabilirler, iletebilirler ve karşılıklı enformasyon alışverişinde bulunabilirler. **Örnek:** ağacın eğilmesinin rüzgarın estiği, kara bulutların yaklaşmasının yağmurun geldiği (olasılıksal) bilgisini vermesi, ...
- Enformasyon iletimi **sinyal**ler ve **işaret**lerin yayılması şeklinde olur. Enformasyon iletiminde çok farklı sinyal ve işaretler kullanılabilir.

Enformasyon teorisinin temel kavramları

- **Semiyotik:** Sinyal ve işaretlerin bilimi.
- **Sinyal:** Herhangi bir türde fiziko-kimyasal değişim.
- Semiyotik açıdan sinyal ve işaret ("sign") farklı kavramlardır: **işaret** bir sinyalin iki sistem arasında doğal olarak taşıdığı anlamın ötesinde, özel mesajlar iletmekte kullanıldığı durumdur.
- Bir mesajın kendi başına bir anlamı yoktur; ancak bir mesaj kaynağının oluşturabileceği olası mesajlar sistemi içinde taşıdığı enformasyon miktarından söz edilebilir. Dolayısıyla **aynı işaret, farklı işaret sistemleri içinde farklı anlamlara gelebilir**.
  Örnek: Tüm sinirlerdeki iletim *var-yok* şeklindeki aksiyon potansiyelleri ile iletilir, ancak bir aksiyon potansiyeli farklı duyusal yolaklarda ışık, basınç, sıcaklık, ses vs. bilgisi taşıyabilir.

Enformasyon teorisinin temel kavramları

- **Entropi:** Rastgele bir değişkendeki ortalama belirsizlik/öngörülemezlik.
- Bir mesaj, kaynağın oluşturabileceği diğer olası mesajları ne oranda geçersizleştiriyor, **belirsizliği ve kuşkuyu ne ölçüde gideriyorsa**, taşıdığı enformasyon miktarı o kadar yüksektir.
- Enformasyon miktarını ifade etmede **Shannon entropisi** ve olasılık teorisi terminolojisi kullanılır. **Başka bir seçeneğin olmadığı, yani olasılığı "1" olan bir mesajın enformasyon miktarı sıfırdır**.
- Enformasyon miktarı mesajın uzunluğuyla ilgili değildir; uzun bir mesajın enformasyon miktarı çok düşük *(Pascal'ın mektubu)*, kısa bir mesajınki ise çok yüksek olabilir.
- En basit enformasyon kaynağı, olasılıkları eşit ve $p = 0.5$ olan iki tip mesaj içerir. Böyle bir kaynağın mesajlarından birinin alınması ile kazanılan enformasyon miktarı **enformasyonun birimi** olarak kabul edilmiştir ve **bit ("binary digit")** adı verilir. Eşit olasılıklı "evet-hayır" şeklinde mesajları olan bir kaynağın verdiği bir mesajla 1 bit'lik enformasyon alınmış olur.

Enformasyon teorisi: Ortalama enformasyon



"Enformasyon belirsizliğin giderilmesidir."

Claude Shannon

Enformasyon teorisinin temel kavramları

Bir mesajın taşıdığı enformasyon miktarı: $I = log_2 \frac{P_o}{P_i}$

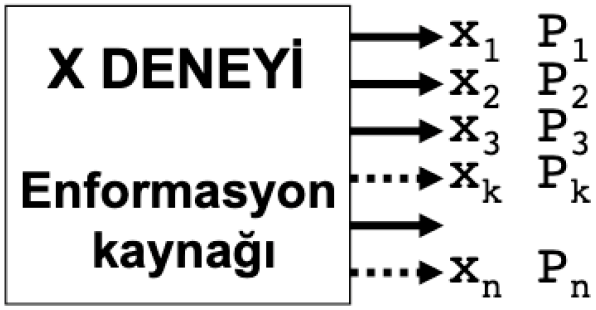
P_i : Mesajın "alınmadan önceki" olasılığı

P_o: Mesajın "alındıktan sonraki" olasılığı

Örnek 1: Atılan bir paranın "yazı" gelme olasılığı $P_i = 0.5$, *atıldıktan sonra* "yazı" gelmişse $P_o = 1$'dir. Dolayısıyla paranın atılmasına karşılık gelen enformasyon miktarı:

$$I = log_2(1/0.5) = log_2(2) = 1 \text{ bittir.}$$

Enformasyon teorisinin temel kavramları



$$I = log_2 \frac{P_o}{P_i}$$

Örnek 2: : 8 sayfalık bir broşür içinde bir sayfada resim bulunduğunu düşünelim. Resmin herhangi bir sayfada bulunma olasılığı $p_i = 1/8$'dir.

- **Mesaj:** "Resim ilk 4 sayfadan birindedir." $\rightarrow I = log_2(\frac{1/4}{1/8}) = log_2(2) = 1$ bit
- **Mesaj:** "Resim ilk 2 sayfadan birindedir." $\rightarrow I = log_2(\frac{1/2}{1/8}) = log_2(4) = 2$ bit
- **Mesaj:** "Resim 3. sayfadadır". $\rightarrow I = log_2(\frac{1}{1/8}) = log_2(8) = 3$ bit

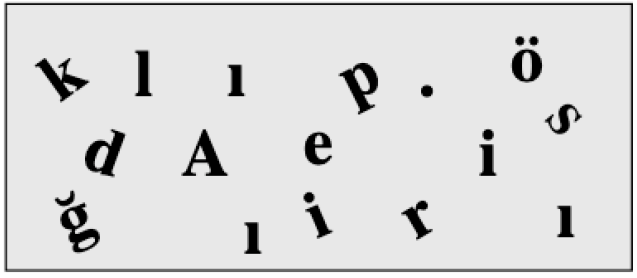
Enformasyon teorisi: Ortalama enformasyon

- Tam belirleyici bir mesaj için $P_o = 1$ olacağından enformasyon miktarı $I = log_2(1/P_i) = -log_2 P_i$ kadardır. Dolayısıyla **olasılığı küçük olan bir olayın gerçekleştiğini bildiren bir mesajın enformasyon miktarı büyüktür**.
- **Ortalama Enformasyon:** Bir enformasyon kaynağının oluşturabileceği olası mesajların olasılıkları farklı değerlere sahip ise, kaynağın mesaj başına verdiği ortalama enformasyon miktarı (H, kaynak belirsizliği) **Shannon formülü** ile hesaplanabilir: $H(P_1, P_2, ..., P_i, \ldots, P_{n-1}, P_n) = -\sum P_i log P_i$
- Bu tip bir kaynakta oluşturulan herhangi bir x_k mesajının olasılığı (P_k) diğerlerinden farklı olabilir.
- Olasılıklar eşitlendikçe belirsizlik artar, H önceki formüle yakınsar. ($H_{max} = -log_2 P = +log_2 n$, n: eşit olasılıklı farklı durumların sayısı)

Enformasyon teorisi: Ortalama enformasyon

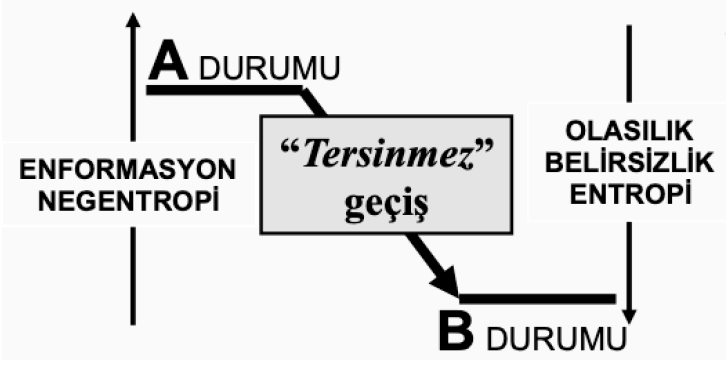
- Enformasyon ve entropi kavramları arasında sıkı bir ilişki vardır. Öyle ki entropi ve belirsizlik sözcüleri enformasyon teorisinde sıklıkla aynı anlamda kullanılır.
- **Bir sistem, olasılığı ne kadar küçük olan bir makro-durumda bulunuyorsa, sisteme depolanmış enformasyon miktarı o kadar büyüktür.**
- Genel olarak herhangi bir "sisteme depolanmış enformasyon" miktarı, $I = H_{max} - H_{göz}$ kadardır.
  H_{max}: Sistemi oluşturan ögelerin olabilecek en dağınık, en düzensiz durumuna karşılık gelen "maksimum" belirsizliği,
  $H_{göz}$: Sistemin gözlenen belirsizliği
- Bu bağlamda, sistem düzensizlikten ne kadar uzaklaşır ise içerdiği enformasyon miktarı da o oranda artar.

Enformasyon teorisi: Ortalama enformasyon



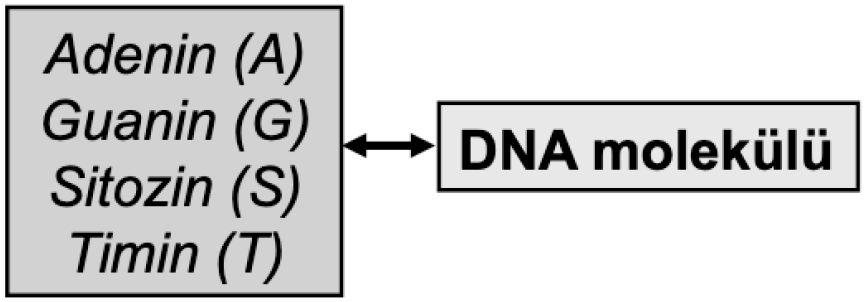
Ali köpeği ısırdı.

- Bir köpeğin bir insanı ısırdığını bildiren haber, olasılığı yüksek olduğundan önemsiz iken, bir insanın bir köpeği ısırdığına dair haber önemli olabilir. Tabi ki mesajın enformasyon miktarının büyük olması, belli bir bağlam içinde değersiz olmasına engel değildir. Düzensizlikten uzaklaştıkça, entropinin azalmasına paralel olarak enformasyon miktarı artar.



- **Bir sistem, olasılığı düşük olan bir A durumundan daha yüksek olasılıklı bir B durumuna kendiliğinden tersinmez bir şekilde geçerken, entropisi, belirsizliği ve düzensizliği artar; enformasyon içeriği azalır.**

Enformasyon teorisi: Biyomoleküler enformasyon



- DNA molekülü 4 temel bazın özel dizilimi ile ortaya çıkar ve bu organizasyon bir enformasyon taşır.
- Bu açıdan DNA zinciri 4 harfli bir alfabe ile yazılmış bir metin gibidir.
- Proteinler de 20 farklı amino asit rezidüsünün dizilimi ile oluşur ve bu şekilde depolanmış enformasyona sahiptir.
- Genel olarak, a sayıda harften oluşan bir alfabeden, her seferinde N tane harf kullanılarak oluşturulabilecek farklı dizilim (mesaj) sayısı $\Omega = a^N$ kadardır.

Enformasyon teorisi: Biyomoleküler enformasyon

Örnek 1: $a = 20$ farklı aminoasit rezidüsünden, $N = 1000$ tanesinin sıralanması ile oluşmuş bir protein molekülü enformasyon teorisi açısından incelenirse:

- Rezidülerin rastgele sıralanması ile, $\Omega = a^N = 20^{1000}$ farklı dizilim elde edilir.
- Herhangi bir dizilimin olasılığı, $P = 1/\Omega$ olacağından, maksimum belirsizlik: $H_{max} = -log_2 p = log_2 \Omega = log_2 20^{1000} = 4320$ bittir.
- Belli bir türde protein ancak belli bir tür dizilime karşılık geldiğinden ($p = 1$ olma durumu): $H_{göz} = -log_2 p_o = 0$'dır.
- Dolayısıyla, böyle bir protein molekülü: $I = H_{max} - H_{göz} = 4320 bit$'lik enformasyon taşır.
- Zincirdeki her bir aminoasit rezidüsüne karşılık gelen ortalama enformasyon miktarı ise $I = log_2(20) = 4.32$ bit/aminoasit olarak hesaplanır.

Enformasyon teorisi: Biyomoleküler enformasyon

Örnek 1: $a = 20$ farklı aminoasit rezidüsünden, $N = 1000$ tanesinin sıralanması ile oluşmuş bir protein molekülü incelenirse:

- Bir DNA molekülündeki her bir baz için 4 olanaklı durum (Alfabe; AT, GC, TA, CG) olduğundan, bir baz başına enformasyon miktarı: $I = log_2(4) = 2$ bit/baz'dır.
- 1000 bazın dizilimi ile ortaya çıkmış bir DNA zincirinin taşıdığı toplam enformasyon miktarı ise: $I = 2\text{x}1000 = 2000$ bittir.

Soru: Bir protein molekülündeki aminoasit rezidülerinin nasıl sıralanacağı bilgisi DNA molekülünde kodlanmış olduğuna göre, 20 aminoasitten birini seçebilmek için gerekli enformasyon DNA molekülünde en az kaç adet bazın dizilimi ile sağlanabilir?

Yanıt: Bir aminoasitin tanınabilmesi için 4.32 bit'lik enformasyon gerektiğine, DNA molekülündeki her bir baz ise 2 bit'lik enformasyon taşıdığına göre, en az üç bazın dizilimi (6 bit) bir aminoaside karşılık tutulabilir.

Enformasyon teorisi: Veri iletimi

Bir sistemin çevresi ile olan madde ve enerji alışverişinde, aslında enformasyon alışverişi olduğu düşünülebilir. Alıcı ve verici durumundaki iki sistem arasında enformasyon alışverişi şu şemaya uyar:

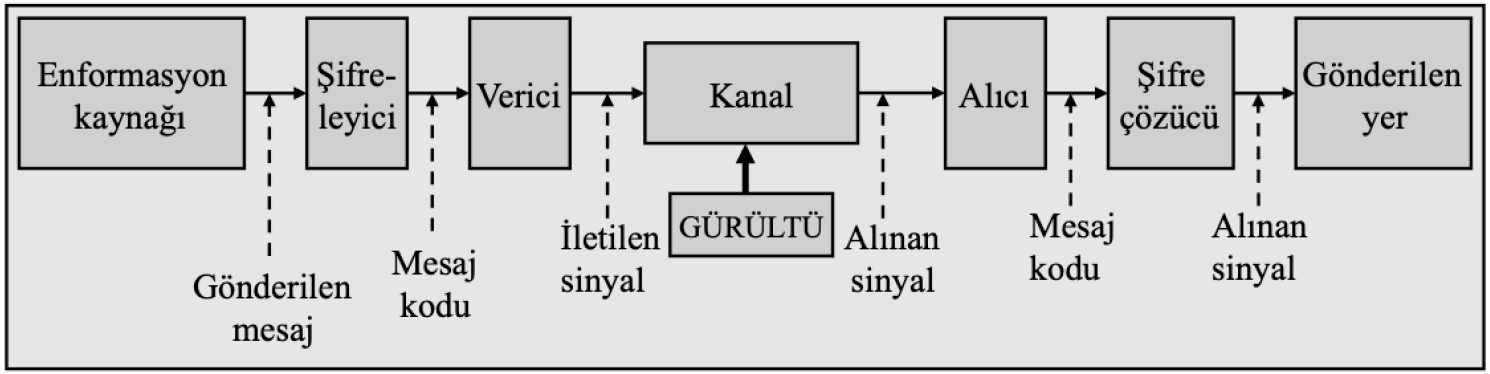
$$\textbf{KAYNAK} \rightarrow \textbf{VERİCİ} \rightarrow \textbf{KANAL} \rightarrow \textbf{ALICI} \rightarrow \textbf{HEDEF}$$

- **Kaynak (enformasyon kaynağı)**: Bir dizi mesaj üreten herhangi bir sistem olarak düşünülebilir. Üretilen bu mesaj, **sistemin sahip olduğu sonlu sayıdaki durumlarından birinin (state) dışarı verilmesi**dir.
- **Verici:** Kaynak tarafından üretilen mesajı, kanalda iletilebilecek hale dönüştüren elemandır. Mesajın kanalda iletilebilecek biçimine sinyal adı verilir.
- **Kanal:** Sinyalin alıcıya iletildiği ortamdır.
- **Alıcı:** Sinyali hedef tarafından algılanabilecek hale dönüştüren elemandır. Alıcı sinyali yeniden mesaj şekline dönüştürerek, vericinin yaptığı işlemin tersini yapmış olur.
- **Hedef:** Mesajın ulaştığı son noktadır.

Enformasyon teorisi: Veri iletimi

- Bir canlı için çevresi sürekli bir enformasyon kaynağıdır. Gelen enformasyon belirli duyusal yollarda dönüştürülür, işlenir ve yorumlanır.
- Örneğin, uygun bir uyaran (enformasyon kaynağı) etkisinde kalan reseptörde reseptör potansiyeli, bağlantılı olduğu nöronda jeneratör potansiyeli ve devamında aksiyon potansiyeli oluşur.
- Beyinde ilgili yerlere iletilen bu sinyaller nöronal entegrasyona dahil olur ve karmaşık biçimlerde işlenerek, yorumlanır ve saklanırlar.
- İletişim sistemlerinde, bir kanalda iletilen toplam enformasyon miktarı yanında, bu kanaldan birim zamanda gönderilebilecek enformasyon miktarı da önemlidir.
- Simgesel olarak, $C = \Delta I / \Delta t$ [bit/s] şeklinde tanımlanan bu niceliğe **kanal kapasitesi** denir. Herhangi bir duyusal yolağın kanal kapasitesi, reseptörlerin cinsi, sayısı, nöronlarla bağlantı biçimi ve MSS entegrasyonuna bağlıdır.

Enformasyon teorisi: Haritalama



- Bir kaynağın yaydığı mesajlar alt sistemleri geçerken önemli değişikliklere uğrayabilir, enformasyon miktarı azalabilir.
- Alt sistemler bir enerji biçimini başka bir enerji biçimine dönüştüren birer çevireç ("transducer") olarak davranırlar.
- Bu kavramlar temel alınarak enformasyon aktarımı, bir nesnenin bir durumunun bir diğer nesnenin bir başka durumuna dönüştürülmesi anlamına gelen **haritalama/"mapping"** olarak da tanımlanır.

Sinyaller Üzerinde İşlemler ve Bilgi Kaybı

Bir nöron aksonunda 8 ayrı dizilim deseninde aksiyon potansiyeli yayıldığını, bu dizilim desenlerinin her birinin eşit olasılıklı olduğunu varsayarsak:

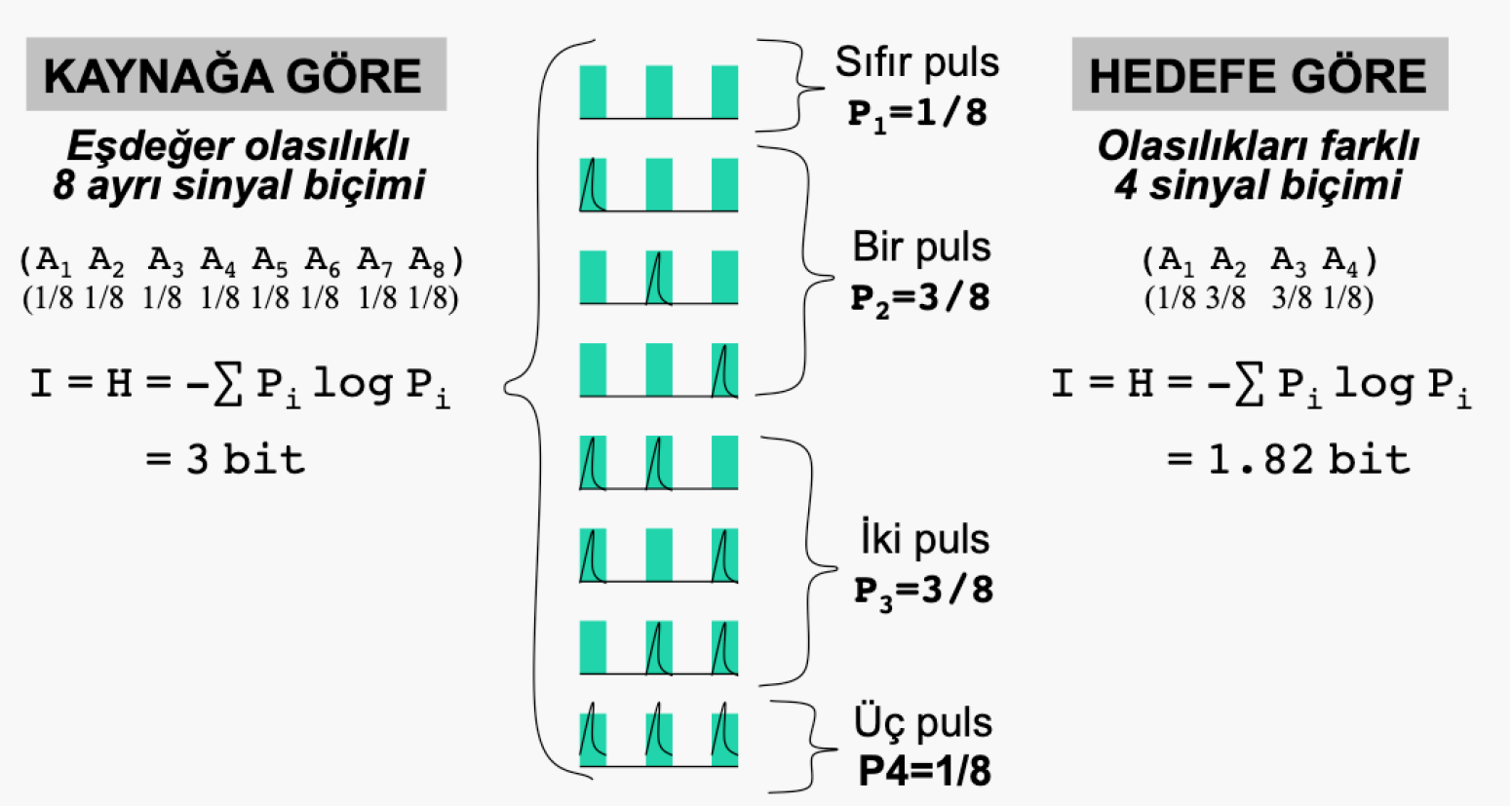
- Kaynak bu desenlerden herhangi birini yaydığında bu mesaja karşılık enformasyon miktarı $I = log_2(8) = -log_2(1/8) = 3$ bittir.
- Olasılıklar eşit olduğundan, kaynağın mesaj başına yaydığı ortalama enformasyon miktarı da yine $I = \sum P_i log_2 P_i = P_i log_2(8) = 3$ bit olarak hesaplanır.

Mesaja karşılık gelen sinyal deseni alt sistemlerden birinde bir ara işleme uğratıldığında birbirinden ayırt edilemeyebilir hale gelebilir. Örneğin, sinyal deseni bir başka nöronda sinaptik iletim sonrası entegrasyona tabi tutuluyorsa, ya da bir alt sistem puls sayacı gibi çalışıyorsa (pulsların sıralanışlarını umursamayıp yalnızca sayısını belirliyorsa), bu yeni durumda: **i) puls yok ii) bir puls iii) İki puls iv) üç puls** şeklinde dört olanaklı sinyal biçimi vardır.

Bu yeni dört durum artık eşit olanaklı değildir. Öyle ki, sinyal başına düşen ortalama enformasyon miktarı 3 bitten

$$I = H = -\sum P_i log_2 P_i = 1.82 \text{ bite düşer.}$$

Sinyaller Üzerinde İşlemler ve Bilgi Kaybı

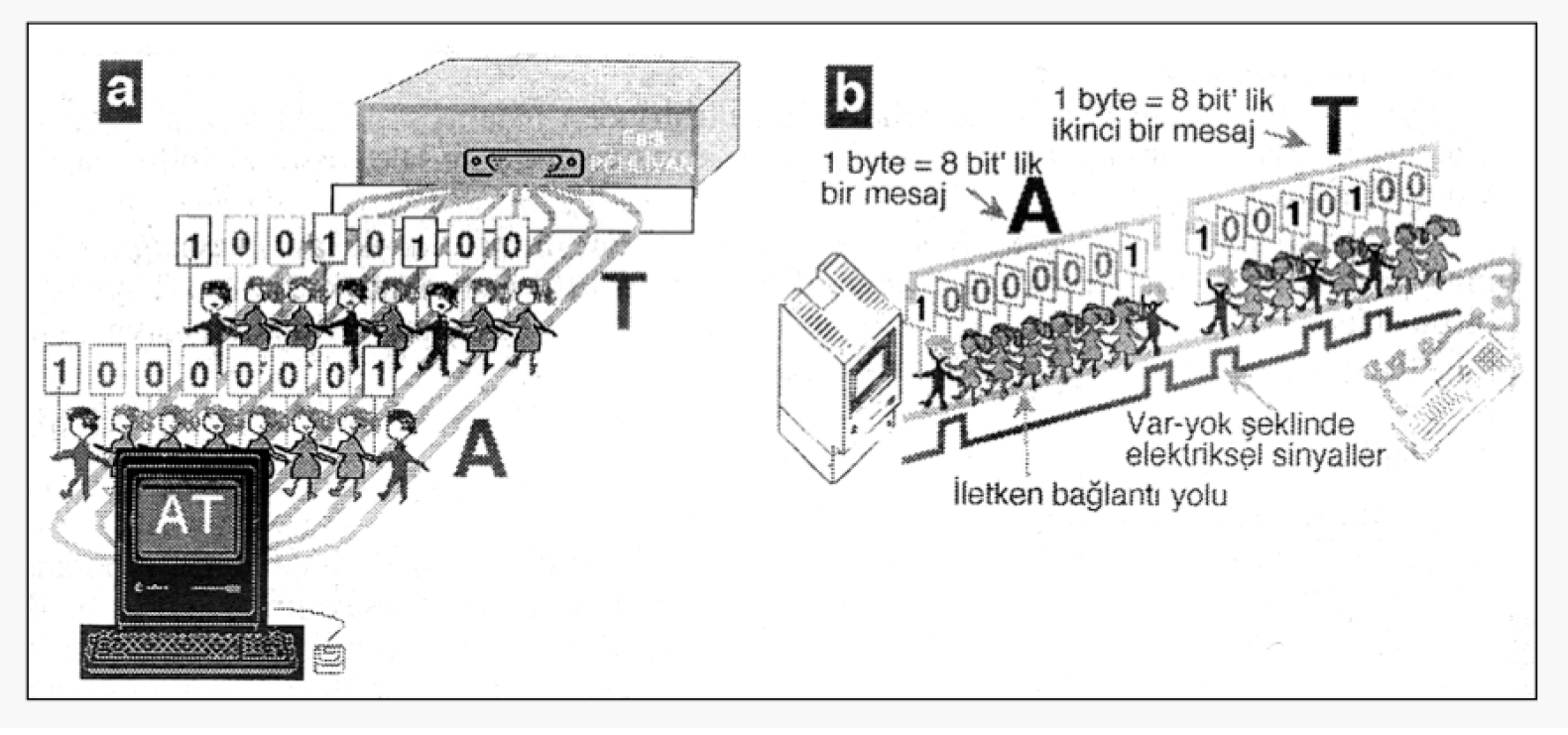


Bir iletişim sisteminde bir alt sistemin bütün olanaklı mesajlara karşılık sinyalleri birbirinden ayırt edememesi enformasyon miktarını küçültür.

Enformasyon teorisi: Bilgisayar sistemleri

- Bilgisayar sistemlerinde, nöronların "ya hep ya hiç" yasasına benzer şekilde, "var/yok" şeklindeki **iki seçenekli simge (binary) sistemi** kullanılmaktadır.
- Her bir simgesi "1 bit" olan böyle bir sistemde "0" ve "1" değerlerinden n tanesi yan yana getirilerek 2^n farklı mesaj üretilebilir. Böyle bir kaynağın her bir mesajı n bit'lik enformasyon taşır.
- Yazı dilimizdeki bir karakterin (harfin), bilgisayar simgeleri cinsinden örneğin, "01000001" şeklindeki bir dizilimi bilgisayar terminolojisinde bir **bayt ("byte")** olarak adlandırılır ve alfabedeki "A" harfine karşılıktır.
- Bir seferde 8-bit işleyen bilgisayar sistemlerinde buna aynı zamanda, **8 bit=1 byte="1 sözcük"="1 machine word"** denir.

Enformasyon teorisi: Bilgisayar sistemleri



Yazı dilindeki her bir karakterin bilgisayar dilinde "0" ve "1" şeklindeki simgelerden en az 8 tanesinin dizilimi ile kodlandığı, günlük hayatımızda (farkında olmadan kullandığımız) standartlar geliştirilmiştir.

Enformasyon teorisi: Biyolojik örnekler: İşitme sistemi

- İşitme yolunda sesleri şiddetlerine, tonlarına ve tınılarına göre ayrımlayabiliyoruz. Bu karakteristiklerden herhangi birinin değiştirilmesi ile farklı ses mesajları üretilebilir.
- Örneğin, $0 - 125$ dB şiddet düzeyleri arasında bulunan sesleri, 0.5 dB'lik adımlar şeklinde ayırt edebiliyoruz.
- Yalnızca şiddet farklarına dayalı bir şifreleme yöntemi ile, $125/0.5 = 250$ adet farklı karakterde ses (mesaj) üretebiliriz.
- Dolayısıyla ses şiddetine dayalı bir mesajın enformasyon miktarı $I_1 = log_2(250) \approx 8$ bit bulunur.
- İşitebildiğimiz sesler ton olarak yaklaşık 10 oktavlık bir aralığı kapsamaktadır. Bir oktav içinde de 12 tonu ayırabiliyoruz.
- Böylece, ayırabildiğimiz saf tonların sayısı $10\text{x}12 = 120$, sadece ton ayrımına dayalı bir mesajın enformasyon miktarı ise $I_2 = log_2(120) \approx 7$ bit olarak hesaplanabilmektedir.

Enformasyon teorisi: Biyolojik örnekler: İşitme sistemi

- Sesin şiddeti ve tonu birlikte dikkate alındığında, $250\text{x}120 = 30000$ farklı kombinasyonda mesaj oluşturulabilir.
- Mesaj başına enformasyon miktarı, $I_1 + I_2 = 15$ bit bulunur. Tını farkları da (kompleks tonlar) dikkate alındığında, her bir ses sinyalinin 20 bit kadar enformasyon taşıyabileceği kabul edilmektedir.
- İnsan işitme sistemi, bir saniyede 10 farklı tonu birbirinden ayırabilmektedir.
- Kulağın ayırabildiği yararlı enformasyon hızı veya kanal kapasitesi 200 bit/s dolaylarındadır.
- Kanal kapasitesi birimi olarak bit/s yerine,
- "Bits ve audio" sözcüklerinden kısaltma ile, "baud" kullanılmaktadır.
- Kulak kanal kapasitesi 200 baud iken, bir telefon hattının kanal kapasitesi 4800 baud kadardır.

Enformasyon teorisi: Biyolojik örnekler: Görme sistemi

- Görme sistemimiz, tüm duyusal enformasyon girdisinin %70-80 kadarını işleyen bir sistemdir.
- İletişim mühendisliğinde, elektromanyetik dalgaların genliği, frekansı, fazı ve polarizasyon durumunun değiştirilmesi şeklinde enformasyon iletilebilmekte ve işlenebilmekte iken, İnsan görme sistemi ise ışığın şiddeti ve dalga boyu değişimleri şeklinde kodlanmış enformasyonu işleyebilmektedir.
- Görme sistemimizin enformasyon işleme kapasitesi, fotoreseptörlerin ve optik sinirlerin organizasyonunca belirlenen ışık deteksiyonundaki uzaysal çözünürlüğüne (rezolüsyon), fotoreseptörlerin zamansal çözünürlüğüne, ayırt edilebilen şiddet ve dalga boyu aralıklarına bağlıdır.

Enformasyon teorisi: Biyolojik örnekler: Görme sistemi

Görme sisteminin N adet uzaysal elemandan oluştuğunu varsayarsak:

- Uzaysal elemanlar bir optik sinir lifi ile bağlantılı olan fotoreseptörler olarak düşünülebilir.
- Her bir elemanın Δt saniyelik zamansal çözünürlüğü olan, i farklı şiddet düzeyini ve her bir şiddet düzeyinde ω adet dalga boyunu ayırdığını varsayarsak, birim zamanda alınan enformasyon:
  $I = (N/\Delta t) log_2(i\omega)$ olarak hesaplanır.
- Gözde $N = 10^6$ reseptör birim bulunduğunu, her birimin en az $\Delta t = 0.1$ s'lik zaman aralıklarında gelen ışık etkilerini ayırabildiğini, eşik ışık şiddeti ile rahatsız edici şiddet arasında $i = 100$ farklı şiddet bulunduğunu ve renk tonu bakımından $\omega = 10^5$ farklı tonun ayrılabildiğini varsayarsak, enformasyon kapasitesi $I = 2\text{x}10^8$ bit/s olarak bulunur.
- Farklı kaynaklar gözün kanal kapasitesini 10^6-10^9 bit/s arasında vermektedir. Kıyasla, analog bir televizyon kanalının enformasyon kapasitesi $7\text{x}10^7$bit/s kadardır.

Enformasyon teorisi: Biyolojik örnekler: MSS

- İç ve dış ortamlardan beyne 10^7 bit/s enformasyon girmektedir.
- Beyinde bilinç algı düzeyine ulaşan enformasyon kapasitesi ise yalnızca $50 - 100$ bit/s'dir.
- Enformasyon miktarının bu düzeyde azalması beynin kod çözme ("decoding") işlemi sırasında gerçekleşmektedir.
- Beynin farklı durumlarda enformasyon işleme kapasitesi:
  - sessiz okuma sırasında 45 bit/s
  - klavyede yazı yazarken 16 bit/s
  - piyano çalarken 23 bit/s

İşlenen enformasyonun depolanan kısmı ise yalnızca $0,2-1$ bit/s'dir.